第９講　総合問題(1)

1　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど２個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

【Point Pickup】

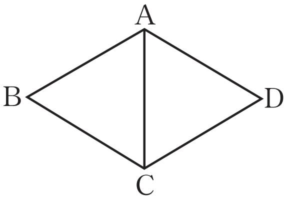
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　図のような4個の点A，B，C，Dを結んだ図形を考える．動点Pは点Aを出発点としてA，B，C，D上を移動する．PがAまたはCにいるときは，残りの3点にそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で移動し，PがBまたはDにいるときはA，Cにそれぞれ$\frac{1}{2}$の確率で移動する．n回の移動後にPがA，B，C，Dにいる確率をそれぞれa_n，b_n，c_n，d_nとする．



(1)　a_{n+1}，c_{n+1}をa_n，b_n，c_n，d_nを用いて表せ．

(2)　数列$\{a_n+c_n\}$，$\{a_n-c_n\}$の一般項を求めよ．

(3)　a_n，c_nを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　xyz 空間において，xy 平面上に点 $(0,\ 1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_1 が，yz 平面上に点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．C_1 上の点 P と C_2 上の点 Q が，それぞれ点 $(0,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を出発点として C_1，C_2 上を正の向きに動く．点 P が点 Q の 2 倍の速さで動くとき，点 P，Q 間の距離の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

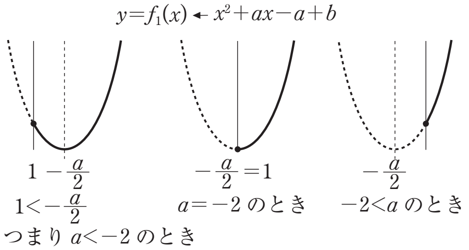
第９講　総合問題 (1)

1　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど２個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

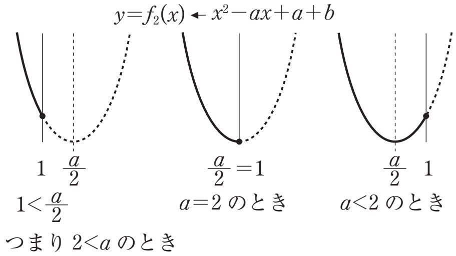
$$f(x)=x^2+a|x-1|+b=\begin{cases}x^2+a(x-1)+b=f_1(x) & (x\geqq 1)\\ x^2-a(x-1)+b=f_2(x) & (x<1)\end{cases}$$ とおく．

$x\geqq 1$ における $f_1(x)=0$ の解と $x<1$ における $f_2(x)=0$ の解が合計２個となるときを考える．

$$f_1(x)=x^2+ax-a+b$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a+b\quad 軸:x=-\frac{a}{2}$$

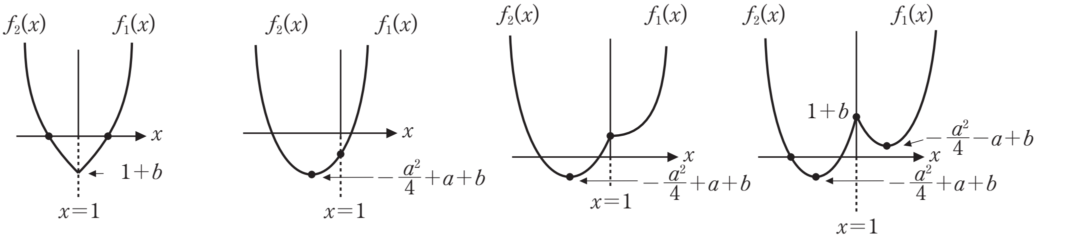


$$f_2(x)=x^2-ax+a+b$$
$$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a+b\quad 軸:x=\frac{a}{2}$$



$f(1)=1+b$

$a>2$ のとき　　$-2<a\leqq 2$ のとき　　$a=-2$　のとき　　$a<-2$ のとき



$1+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0$　　$-\frac{a^2}{4}+a+b<0<-\frac{a^2}{4}-a+b$

または　$1+b<0$

ゆえに a，b の満たすべき条件は

$a>2$ のとき　　$b<-1$

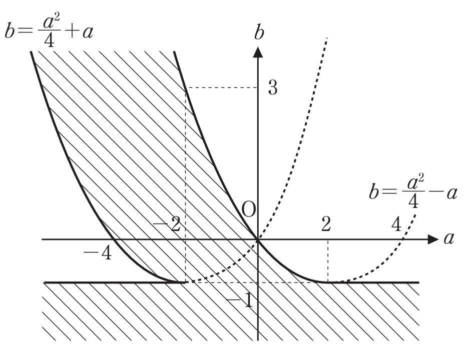
$-2\leqq a\leqq 2$ のとき　　$b<\frac{a^2}{4}-a$

$a<-2$ のとき　　$\frac{a^2}{4}+a<b<\frac{a^2}{4}-a$

　　　　　または　$b<-1$

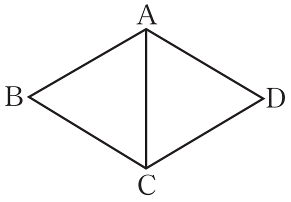
図示すると右図斜線部．境界は含まない．

ただし点 $(-2,\ -1)$ は含む．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　図のような4個の点 A，B，C，D を結んだ図形を考える．動点Pは点Aを出発点としてA，B，C，D上を移動する．PがAまたはCにいるときは，残りの3点にそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で移動し，PがBまたはDにいるときはA，Cにそれぞれ$\frac{1}{2}$の確率で移動する．n回の移動後にPがA，B，C，Dにいる確率をそれぞれa_n，b_n，c_n，d_nとする．



(1)　a_{n+1}，c_{n+1}をa_n，b_n，c_n，d_nを用いて表せ．

(2)　数列$\{a_n+c_n\}$，$\{a_n-c_n\}$の一般項を求めよ．

(3)　a_n，c_nを求めよ．

(1)　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{2}d_n}$　……①　　$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}d_n}$　……②

(2)　①＋②より　$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+b_n+d_n$

ここで　$a_n+b_n+c_n+d_n=1$　より

$$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+1-(a_n+c_n)=\boldsymbol{-\frac{2}{3}(a_n+c_n)+1}$$

$a_n+c_n=p_n$ とおくと　$p_{n+1}=-\frac{2}{3}p_n+1$，$p_1=a_1+c_1=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$$p_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{3}{5}\right),\quad p_1-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}$$

よって　$p_n-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n+c_n=\boldsymbol{\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\left(=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$　……③

①－②より　$a_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_n-c_n)$，$a_1-c_1=-\frac{1}{3}$

ゆえに　$a_n-c_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$　……④

(3)　(③＋④)÷2 より

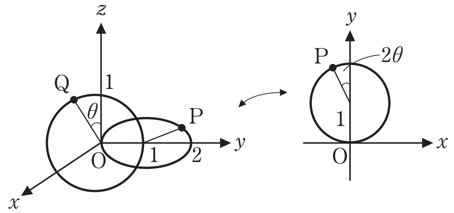
$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{10}-\frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\left(=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

(③－④)÷2 より

$$\boldsymbol{c_n=\frac{3}{10}-\frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\left(=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　xyz 空間において，xy 平面上に点 $(0, 1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_1 が，yz 平面上に点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．C_1 上の点 P と C_2 上の点 Q が，それぞれ点 $(0, 2, 0)$，$(0, 0, 1)$ を出発点として C_1，C_2 上を正の向きに動く．点 P が点 Q の 2 倍の速さで動くとき，点 P，Q 間の距離の最大値を求めよ．



Q が θ だけ回ったとき，P は 2θ だけ回る．

よって　$\mathrm{P}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right),\ 1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right),\ 0\right)$

すなわち　$\mathrm{P}(-\sin 2\theta,\ 1+\cos 2\theta,\ 0)$

$\mathrm{Q}\left(0,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

すなわち　$\mathrm{Q}(0,\ -\sin\theta,\ \cos\theta)$

ゆえに　$\mathrm{PQ}^2=\sin^2 2\theta+(1+\sin\theta+\cos 2\theta)^2+\cos^2\theta$

$=\sin^2 2\theta+1+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\sin\theta+2\sin\theta\cos 2\theta+2\cos 2\theta+\cos^2\theta$

$=3+2\sin\theta+2\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2(1-2\sin^2\theta)$

$=-4\sin^3\theta-4\sin^2\theta+4\sin\theta+5$

$\sin\theta=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq 1$

$\mathrm{PQ}^2=-4t^3-4t^2+4t+5=f(t)$　とおくと　$f'(t)=-12t^2-8t+4=-4(3t-1)(t+1)$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$ で $f(t)$ は最大となる．

ゆえに，PQ の最大値は　$\sqrt{f\left(\dfrac{1}{3}\right)}=\sqrt{\dfrac{155}{27}}=\dfrac{\sqrt{465}}{9}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=2|x(x^2-1)|$ のグラフの概形をかけ．

(2)　k を実数とするとき，方程式 $2|x(x^2-1)|=k-|x|$ の解の個数を k の値に応じて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点をOとする xyz 空間内で，x 軸上の点A，xy 平面上の点B，z 軸上の点Cを，次を満たすように定める．$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{OBC}=\theta$，$\angle \mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$
ただし，Aの x 座標，Bの y 座標，Cの z 座標はいずれも正であるとする．さらに，$\triangle$ABC内の点のうち，Oからの距離が最小の点をHとする．また，$t=\tan\theta$ とおく．

(1)　線分OHの長さを t の式で表せ．

(2)　Hの z 座標を t の式で表せ．

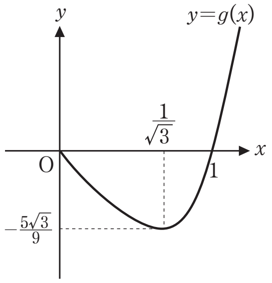
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=2|x(x^2-1)|$ のグラフの概形をかけ．

(2)　k を実数とするとき，方程式 $2|x(x^2-1)|=k-|x|$ の解の個数を k の値に応じて求めよ．

解答例



(1)　$g(x)=2x(x^2-1)=2x^3-2x$ は奇関数より，グラフは原点対称．

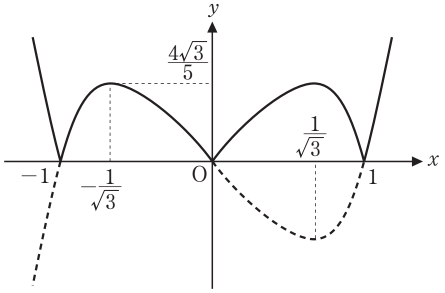
よって，まずは $x\geqq 0$ の部分で考える．

$g'(x)=6x^2-2$　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で　$g'(x)=0$

よって　$y=g(x)$ の $x\geqq 0$ におけるグラフは右図．

このグラフを原点に関して対称移動し，さらにその全体のグラフにおいて x 軸より下の部分を上に折り返したものが $y=f(x)$ のグラフである．

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図．



(2)　$y=-|x|+k$ のグラフ（上に凸の折れ線）と $y=f(x)$ のグラフの共有点の個数を求める．

この2つのグラフはともに y 軸対称より $x>0$ の部分のみ考える．

$y=-x+k$　と　$y=-g(x)$　が接するのは

$-g'(x)=-1$　より　$-6x^2+2=-1$　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときで　$-g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

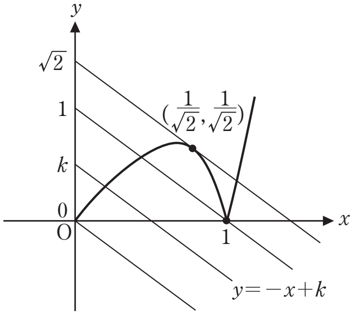
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を $y=-x+k$ が通るのは　$k=\sqrt{2}$ のとき

また，$(1, 0)$ を $y=-x+k$ が通るのは　$k=1$ のとき

この結果を $x<0$ の部分に反映し，

さらに，$x=0$ 上に交点があるときの $k=0$ も考慮すると，

求める解の個数は



$$\begin{cases} k<0 \text{ のとき } 0\text{個} \\ k=0 \text{ のとき } 1\text{個} \\ 0<k<1 \text{ のとき } 2\text{個} \\ k=1 \text{ のとき } 4\text{個} \\ 1<k<\sqrt{2} \text{ のとき } 6\text{個} \\ k=\sqrt{2} \text{ のとき } 4\text{個} \\ k>\sqrt{2} \text{ のとき } 2\text{個} \end{cases}$$

対称性をうまく利用し，答案を仕上げてゆくとよい．
ちなみに
　偶関数……$f(x)=f(-x)$　y 軸対称
　奇関数……$f(x)=-\{f(-x)\}$　原点対称
である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

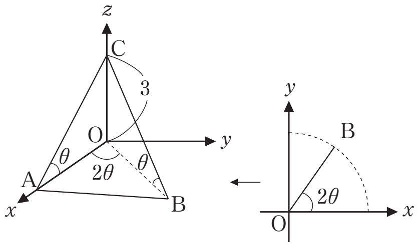
2 原点をOとする xyz 空間内で，x 軸上の点A，xy 平面上の点B，z 軸上の点Cを，次を満たすように定める．$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OBC}=\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$

ただし，Aの x 座標，Bの y 座標，Cの z 座標はいずれも正であるとする．さらに，△ABC内の点のうち，Oからの距離が最小の点をHとする．また，$t=\tan\theta$ とおく．

(1) 線分OHの長さを t の式で表せ．

(2) Hの z 座標を t の式で表せ．

解答例



(1) $\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}=\tan\theta$ より　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{3}{t}$

また　$\mathrm{OC}=3$

よって　$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{t}\cos 2\theta,\ \dfrac{3}{t}\sin 2\theta,\ 0\right)$，

$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$

とおける．

ここでHは平面ABC上の点より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$l+m+n=1$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 2\theta=\frac{9}{t^2}\cos 2\theta \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

さらに，HはOからの距離が最小の点より　OH⊥平面ABC　である．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$　より　$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$$l|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-n|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0 \qquad \frac{9}{t^2}l+\frac{9}{t^2}(\cos 2\theta)m-9n=0 \quad \cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$　より　$(l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$$l\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-n|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0 \qquad \frac{9}{t^2}(\cos 2\theta)l+\frac{9}{t^2}m-9n=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$l(1-\cos 2\theta)=m(1-\cos 2\theta)$　　$\theta\neq 0$ より　$l=m$

このとき　$l+m+n=1$ より　$n=1-2l$　　よって，①より　$l+(\cos 2\theta)l-t^2(1-2l)=0$

$$(1+\cos 2\theta+2t^2)l=t^2 \qquad ここで\quad \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)-1 より$$

$$\left(\frac{2}{1+t^2}+2t^2\right)l=t^2 \qquad ゆえに\quad l=\frac{t^2(1+t^2)}{2(t^4+t^2+1)}$$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=l^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+n^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2lm\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{9}{t^2}l^2\times 2+9(1-2l)^2+2l^2\cdot\frac{9}{t^2}\cos 2\theta=\frac{18}{t^2}\left(1+2t^2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)l^2-36l+9$$

$$=\frac{36(t^4+t^2+1)}{t^2(1+t^2)}l^2-36l+9=\frac{9(t^4+t^2)}{t^4+t^2+1}-\frac{18(t^4+t^2)}{t^4+t^2+1}+9=\frac{9}{t^4+t^2+1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\mathrm{OH}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\boldsymbol{t}^4+\boldsymbol{t}^2+\mathbf{1}}}$

ベクトルを導入した解法である．知識的にはオーソドックスである．三角関数を使って B の座標を設定した．
OH の長さの計算のくだりは，文字を「徐々に」減らした．まずは m と n を l で表し，その後，$\cos2\theta$ を t で表し，最後に l を t で表した．これは「煩雑なものの解放は後回し」という概念に基づく．今回は l を t で表すタイミング，いわゆる「解放」が早ければ早いほど煩雑になりやすい．よって，l に関して降べきの順にしつつ cos を解放し，最後に l を解放したのがわかるであろう．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)+m\left(\dfrac{3}{t}\cos2\theta,\ \dfrac{3}{t}\sin2\theta,\ 0\right)+n(0,\ 0,\ 3)$

より H の z 座標は $3n$

すなわち　$3(1-2l)=3\left(1-\dfrac{t^2+t^4}{t^4+t^2+1}\right)=\dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{t}^4+\boldsymbol{t}^2+\mathbf{1}}$　である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。